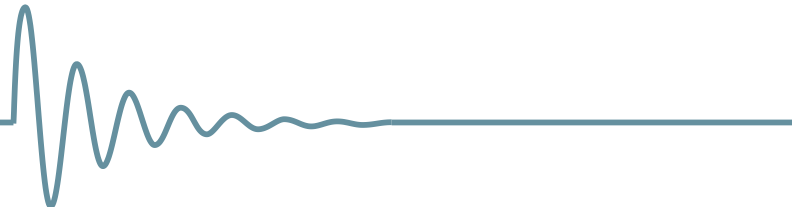


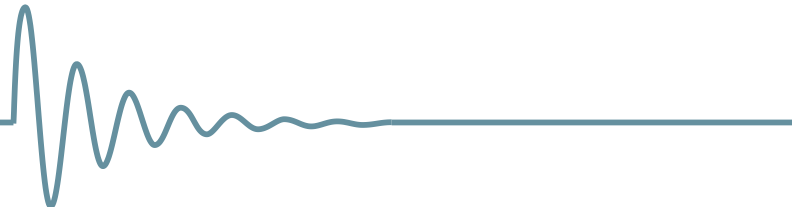
Tema 5

Transformada de Laplace



Índice

- Introducción
- Transformada bilateral de Laplace
- Región de convergencia
- Relación entre transformada de Fourier y Transformada de Laplace
- Análisis de sistemas representados por ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes
- Transformada unilateral de Laplace y su aplicación al análisis de sistemas



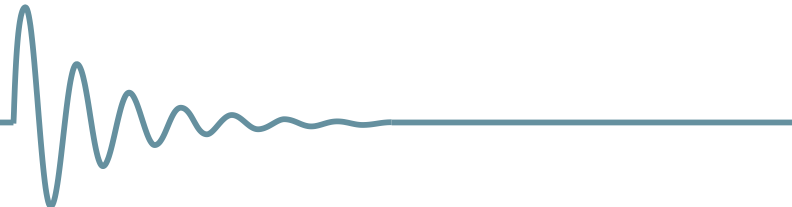
Introducción (I)

- Transformada de Fourier: potente herramienta para el estudio de los sistemas LTI

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

- Numerosas aplicaciones: análisis de la respuesta en frecuencia de los sistemas LTI, muestreo, modulación, ...
- Transformada de Laplace: generalización de la transformada de Fourier que permite el análisis de una clase más amplia de señales y sistemas



Introducción (II)

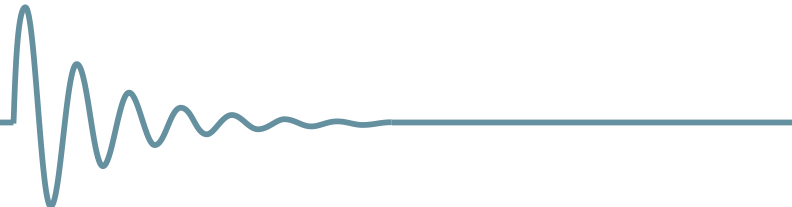
- La transformada de Fourier no existe para señales que no cumplan la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

- En consecuencia, no puede aplicarse a sistemas inestables:

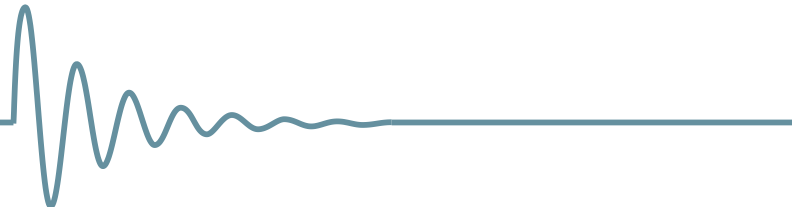
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \infty$$

- En muchas aplicaciones se trabaja con sistemas inestables: osciladores, láser, estabilización de un avión, ...



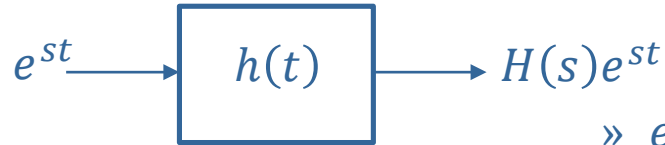
Introducción (III)

- Transformada de Laplace
 - Transformada unilateral
 - Ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales
 - Transformada bilateral
 - Estabilidad, causalidad, respuesta en frecuencia
 - En ingeniería:
 - Análisis transitorio y de estabilidad de sistemas LTI de sistemas causales descritos por ecuaciones diferenciales



Respuesta de sistemas LTI a una exponencial compleja

- Cómo se analizan estas señales y estos sistemas



» e^{st} : función propia de los sistemas LTI

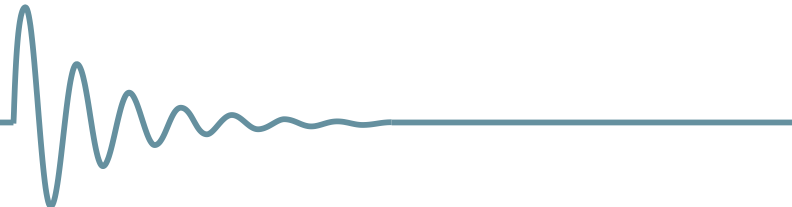
» $s = \sigma + j\omega$, $s \in \mathbb{C}$

- La respuesta de un sistema LTI, con respuesta al impulso $h(t)$, a una entrada exponencial compleja de la forma e^{st} viene dada por:

$$y(t) = H\{x(t)\} = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = H\{e^{st}\} = h(t) * e^{st} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

- Si $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$ es la función de transferencia, entonces la respuesta del sistema será $y(t) = H(s)e^{st}$



Transformada de Laplace de una señal arbitraria

- Sea $x(t)$ una señal arbitraria con transformada de Laplace $X(s)$

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

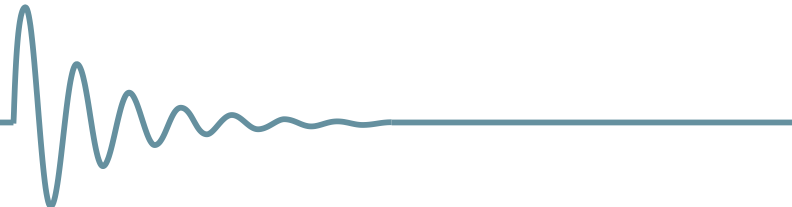
Como $s = \sigma + j\omega$:

$$X(s) = X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) e^{-\sigma t}) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{x(t) e^{-\sigma t}\}$$

- $X(s)$ sólo existe para aquellos valores de s que se encuentren en la región de convergencia (RoC)

$$RoC = \left\{ s = \sigma + j\omega \text{ tal que } \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-\sigma t}| dt < \infty \right\}$$

- Si $s = j\omega$ pertenece a la RoC ($\sigma = 0$): $X(s)|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$



Relación transformadas de Fourier y Laplace (I)

- **Ejemplo 1:** Transformada Fourier y Laplace de: $x(t) = e^{-at}u(t)$

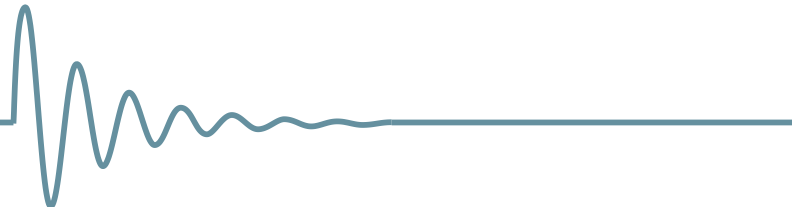
- Transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-at} u(t)) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{1}{a+j\omega}, \quad a > 0 \end{aligned}$$

- Transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-at} u(t)) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \mathcal{F}\{e^{-(\sigma+a)t}u(t)\} = \frac{1}{(\sigma+a)+j\omega}, \quad \sigma + a > 0 \end{aligned}$$

y como $s = \sigma + j\omega$ y $\sigma = \text{Re}\{s\}$, $X(s) = \frac{1}{s+a}$, $\text{Re}\{s\} > -a$



Relación transformadas de Fourier y Laplace (II)

$$x(t) = e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

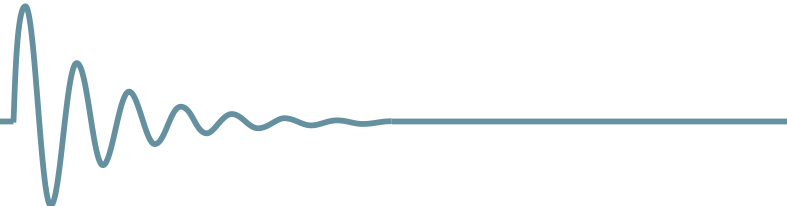
- La transformada de Laplace converge si $\text{Re}\{s\} > -a$
 - Si $a > 0$, $X(s)$ puede evaluarse en $\sigma = 0$

$\sigma = 0$: Transformada de Laplace $\equiv$ Transformada de Fourier

- Si $a \leq 0$

Converge Transformada de Laplace

No converge Transformada de Fourier



Región de convergencia (I)

- **Ejemplo 2:** Calcular la transformada de Laplace, $x(t) = -e^{-at}u(-t)$

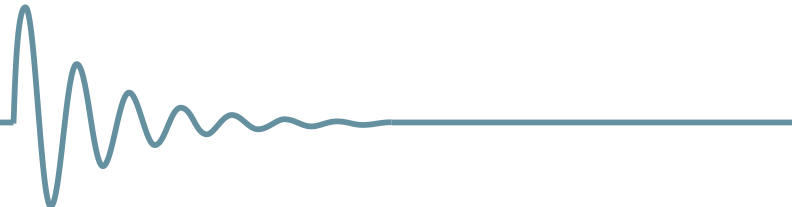
- Transformada de Laplace de la señal $x(t)$:

$$\begin{aligned} X(s) &= - \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-at} u(-t)) e^{-st} dt = \\ &= - \int_{-\infty}^0 e^{-(a+s)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} < -a \end{aligned}$$

- Comparamos $X(s)$ del ejemplo 1 con $X(s)$ del ejemplo 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = e^{-at}u(t) \\ X(s) = \frac{1}{s+a}, \text{ Re}\{s\} > -a \end{array} \right\}; \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = -e^{-at}u(-t) \\ X(s) = \frac{1}{s+a}, \text{ Re}\{s\} < -a \end{array} \right.$$

Se observa que ambas transformadas tienen expresiones algebraicas idénticas pero rango de valores de convergencia diferentes

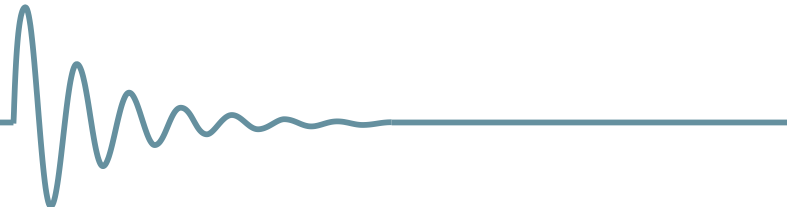


Región de convergencia (II)

- Definimos la **Región de convergencia** (RoC) como el rango de valores de σ para los que la transformada de Laplace converge.

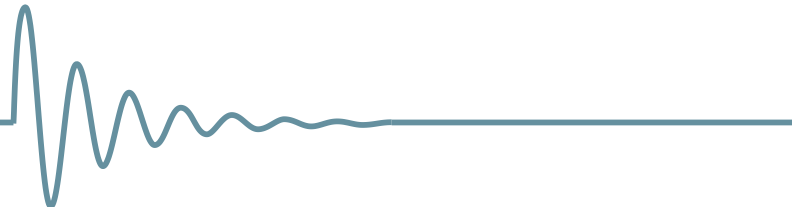
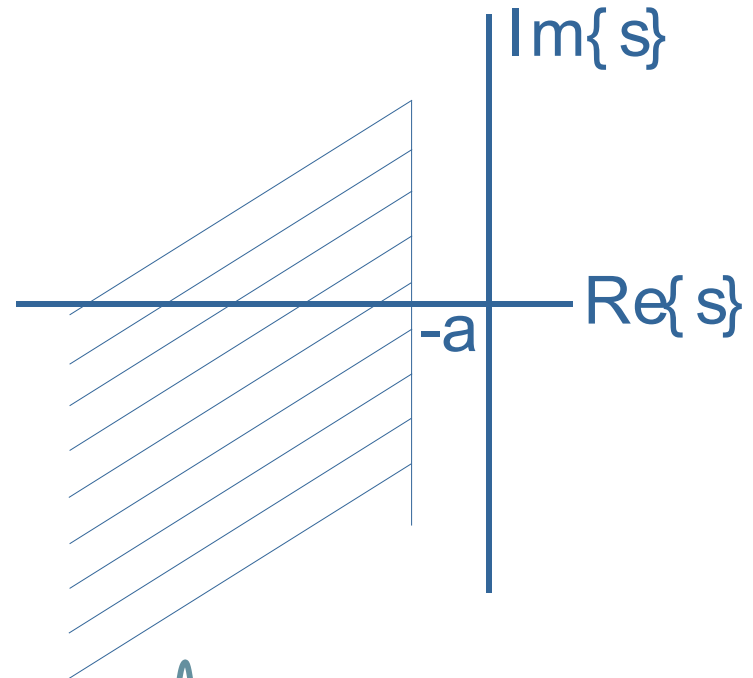
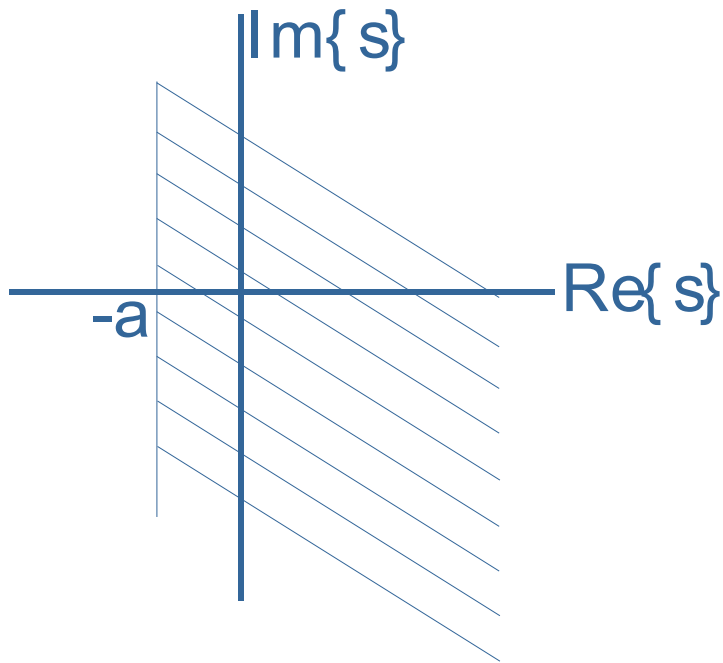
Como $X(s) = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$, la condición de convergencia de la transformada de Laplace viene dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$



Región de convergencia (III)

$$\begin{cases} x(t) = e^{-at}u(t) \\ X(s) = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}\{s\} > -a \end{cases}; \quad \begin{cases} x(t) = -e^{-at}u(-t) \\ X(s) = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}\{s\} < -a \end{cases}$$

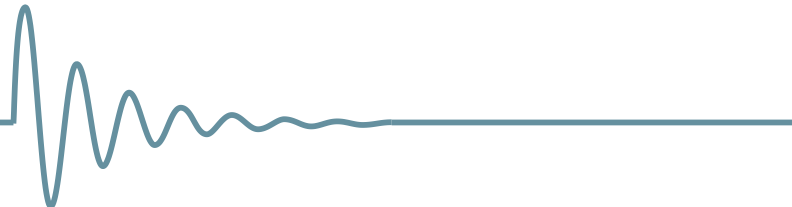


Transformada de Laplace racional (I)

- Muchas expresiones algebraicas de la transformada de Laplace son funciones racionales de s (Ejemplos 1 y 2)
- Funciones habituales en sistemas LTI descritos por ecuaciones diferenciales de coeficientes lineales constantes

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\text{Polinomio del numerador}}{\text{Polinomio del denominador}}$$

- Raíces de $N(s)$ = *Ceros de $X(s)$* – (○)
- Raíces de $D(s)$ = *Polos de $X(s)$* – (x)



Transformada de Laplace racional (II)

- **Ejemplo 3:** Calcular la transformada de Laplace

$$x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$$

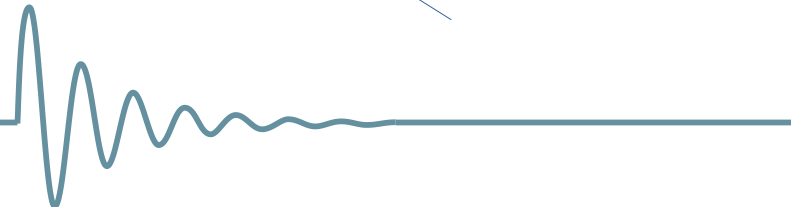
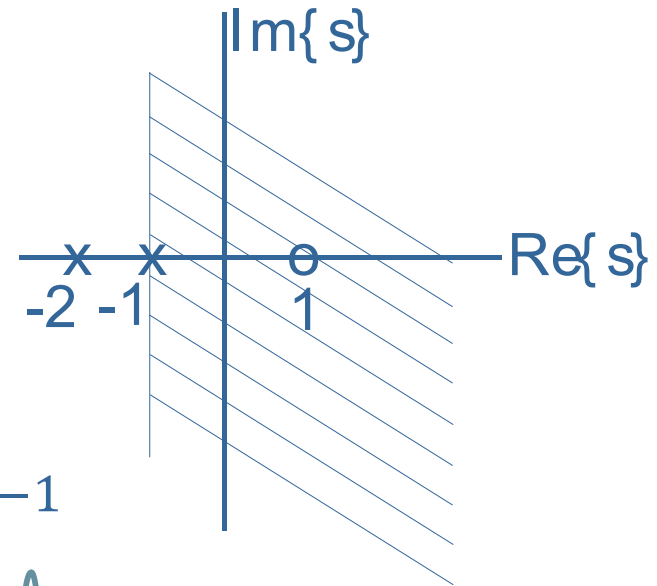
- Hemos visto que:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)) e^{-st} dt$$

$$= 3 \int_0^{\infty} e^{-(s+2)t} dt - 2 \int_0^{\infty} e^{-(s+1)t} dt =$$

$$= \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1} = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

$$X(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+2} = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}, \operatorname{Re}\{s\} > -1$$



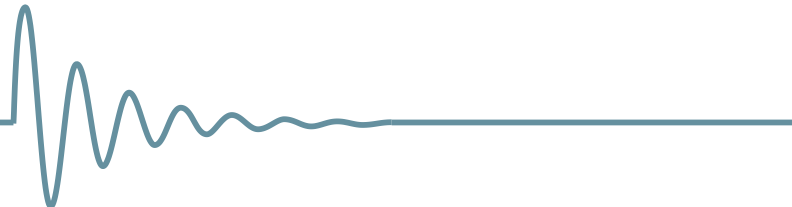
Propiedades de la región de convergencia (I)

- **Propiedad 1:** La RoC de $X(s)$ consiste en bandas paralelas al eje $j\omega$ en el plano- s (RoC sólo depende de σ)

$$RoC = \text{valores de } s = \sigma + j\omega / \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \Rightarrow \text{depende } \sigma$$

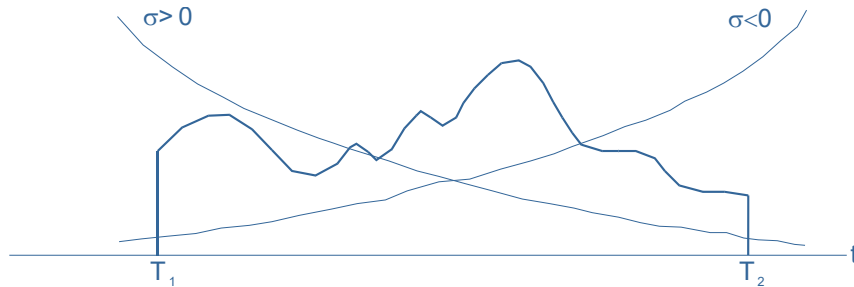
- **Propiedad 2:** Si $X(s)$ es una función racional, la RoC no contiene ningún polo

$$D(s) = 0 \Rightarrow X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \infty, \quad X(s) \text{ no converge}$$



Propiedades de la región de convergencia (II)

- **Propiedad 3:** Si $x(t)$ es de duración finita y absolutamente integrable, la RoC es todo el plano- s

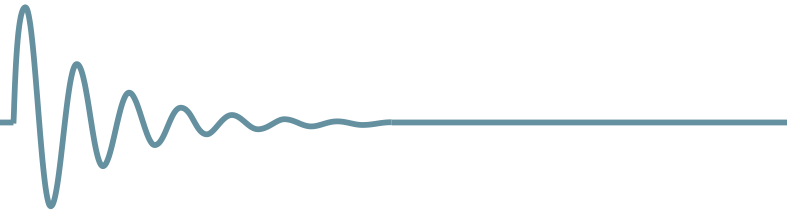


$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt < \infty$$

$$\forall s = \sigma + j\omega \in RoC,$$

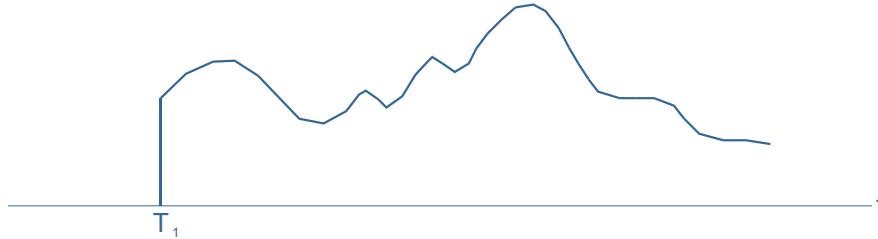
$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

- Si $\sigma = 0$, $Re\{s\} = \sigma = 0 \in RoC$
- Si $\sigma > 0$, $\int_{T_1}^{T_2} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < e^{-\sigma T_1} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt \Rightarrow Re\{s\} > 0 \in RoC$
- Si $\sigma < 0$, $\int_{T_1}^{T_2} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < e^{-\sigma T_2} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt \Rightarrow Re\{s\} < 0 \in RoC$



Propiedades de la región de convergencia (III)

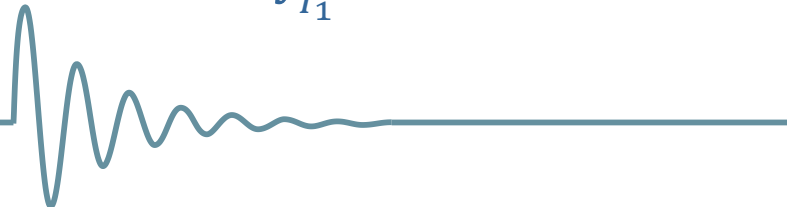
- **Propiedad 4:** Si $x(t)$ está acotada en el tiempo por la izquierda (se extiende hacia el infinito por la derecha) y $Re\{s\} = \sigma_0$ pertenece a la RoC, entonces todos los valores de s para los que $Re\{s\} > \sigma_0$ también pertenecen a la RoC (RoC=semiplano derecho)



Supongamos que $\exists \sigma = \sigma_0 / \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma_0 t}| dt = \int_{T_1}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty$

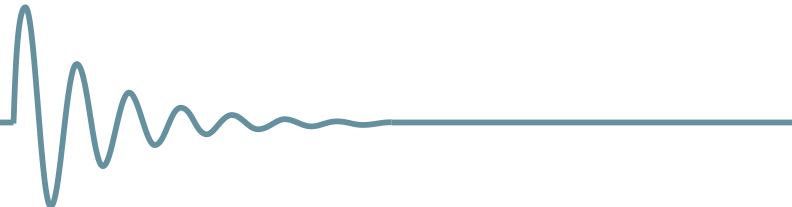
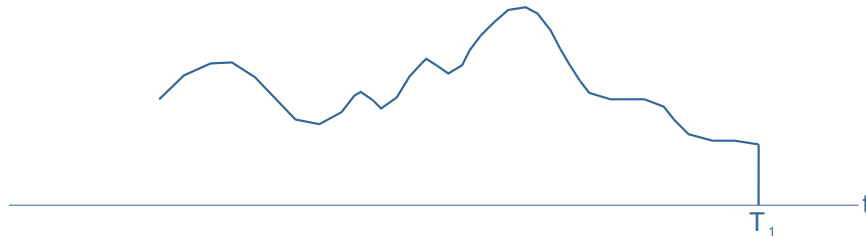
- Si $\sigma_1 > \sigma_0$, cuando $t \rightarrow \infty$, $e^{-\sigma_1 t}$ decae más rápido que $e^{-\sigma_0 t}$:

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma_1 t}| dt &= \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} e^{-\sigma_0 t} e^{\sigma_0 t} dt = \\ &= \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} dt \leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1} \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt \end{aligned}$$



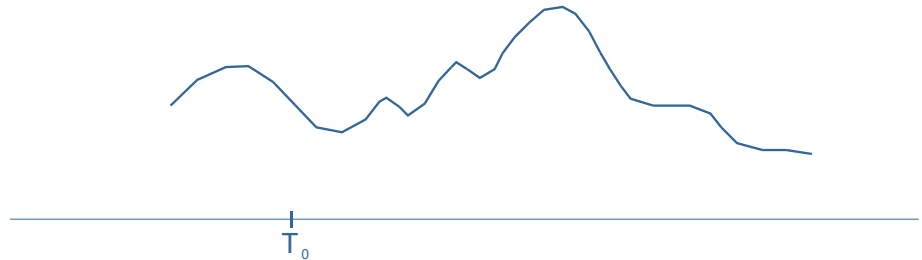
Propiedades de la región de convergencia (IV)

- **Propiedad 5:** Si $x(t)$ está acotada en el tiempo por la derecha (se extiende hacia el infinito por la izquierda) y $Re\{s\} = \sigma_0$ pertenece a la RoC, entonces todos los valores de s para los que $Re\{s\} < \sigma_0$ también pertenecen a la RoC (RoC=semiplano izquierdo)

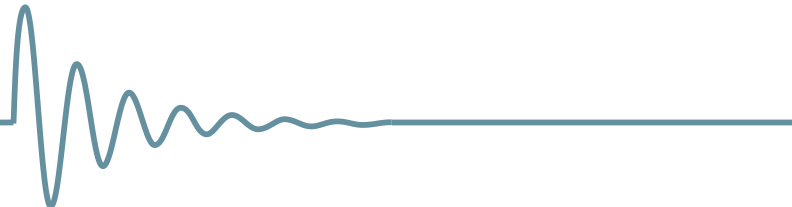


Propiedades de la región de convergencia (V)

- **Propiedad 6:** Si $x(t)$ no está acotada en el tiempo y $Re\{s\} = \sigma_0$ pertenece a la RoC, entonces la RoC consiste en una banda en el plano- s que incluye la línea $Re\{s\} = \sigma_0$

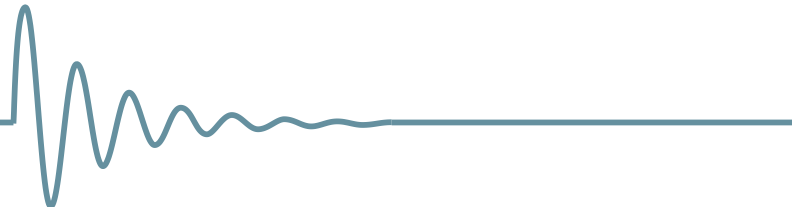


- Dado un T_0 , se puede considerar la señal como la suma de dos señales, una acotada por la derecha y otra por la izquierda
 - Propiedad 4: $RoC = Re\{s\} > \sigma_L$
 - Propiedad 5: $RoC = Re\{s\} < \sigma_R$
- $RoC = \text{Solapamiento semiplanos} \Rightarrow \sigma_L < \sigma_R$



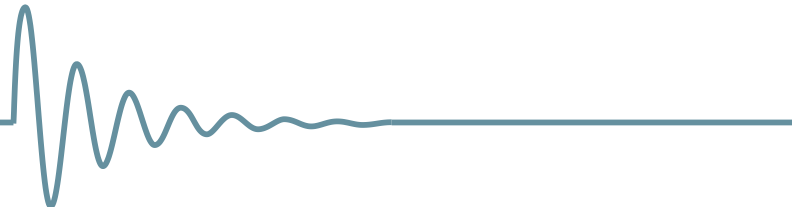
Propiedades de la región de convergencia (VI)

- Resumiendo: una señal o bien no tiene transformada de Laplace o pertenece a una de las categorías definidas por las propiedades 3–6:
 - Señales de duración finita: RoC = plano- s .
 - Señales acotadas por la izquierda: RoC = semiplano derecho.
 - Señales acotadas por la derecha: RoC = semiplano izquierdo.
 - Señales no acotadas: RoC = banda en el plano- s .



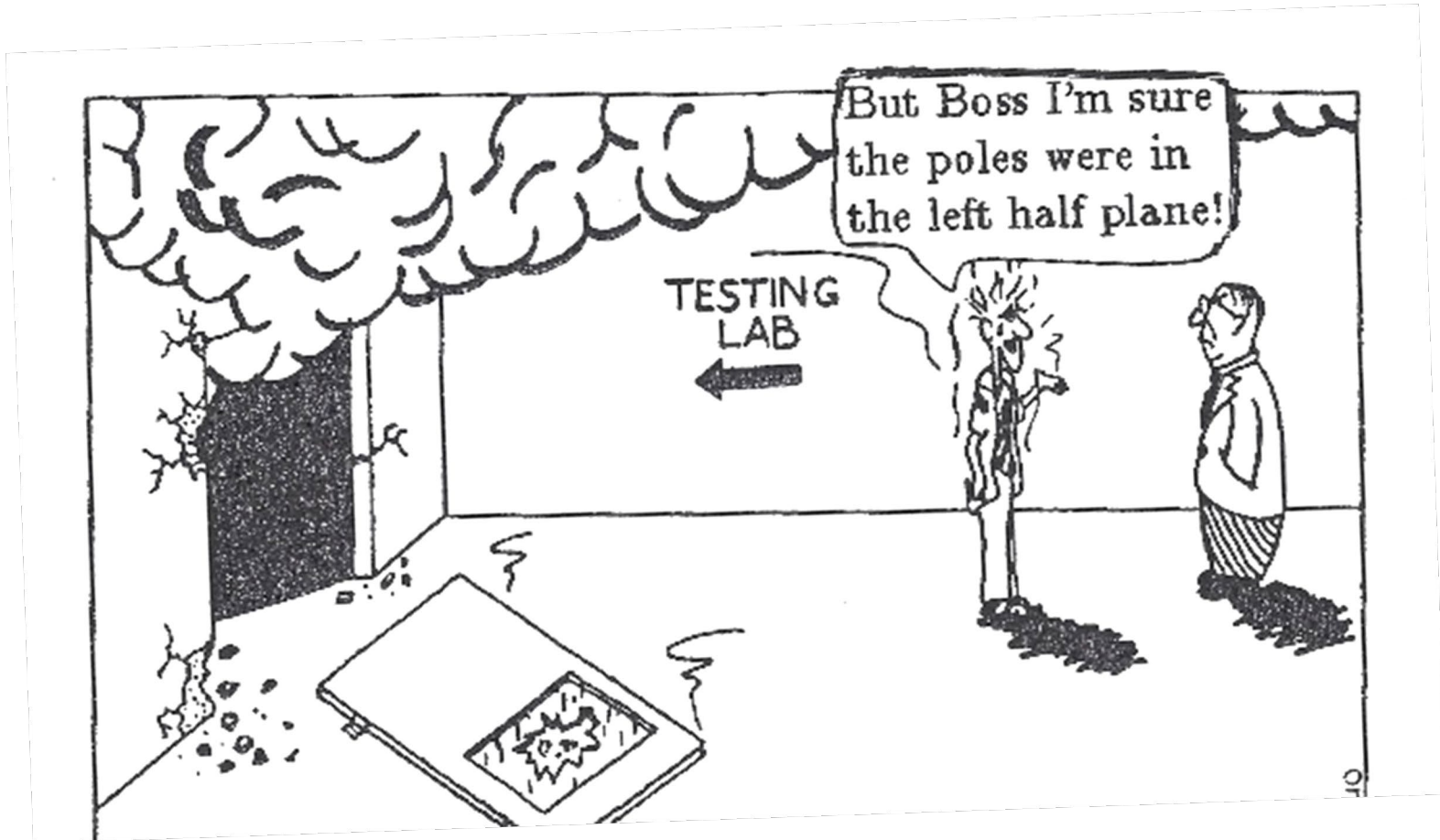
Propiedades de la región de convergencia (VII)

- Si además la Transformada de Laplace $X(s)$ de una señal $x(t)$ tiene una expresión racional:
 - **Propiedad 7:** Si $x(t)$ tiene transformada $X(s)$ racional, entonces su RoC está limitada por polos o se extiende al infinito. Además, no hay polos de $X(s)$ en la RoC.
 - **Propiedad 8:** Si $x(t)$ tiene transformada $X(s)$ racional y está acotada en el tiempo por la izquierda, su RoC es la región en el plano- s a la derecha del polo situado más a la derecha. Si $x(t)$ está acotada en el tiempo por la derecha su RoC es la región en el plano- s a la izquierda del polo situado más a la izquierda.



Propiedades de la región de convergencia (VIII)

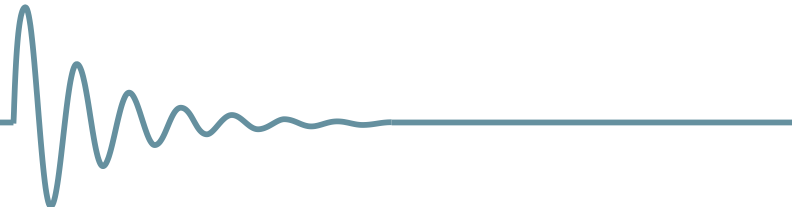
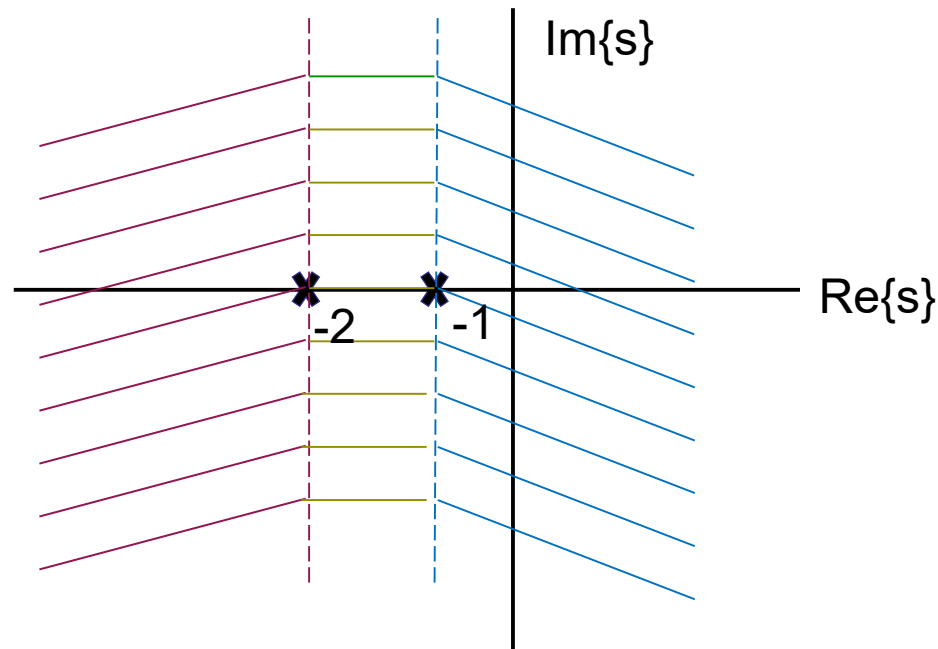
- © Lathi



Propiedades de la región de convergencia (IX)

- EJEMPLO: Analizar las posibles señales asociadas a la expresión algebraica de la transformada de Laplace:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$



Propiedades de la región de convergencia (X)

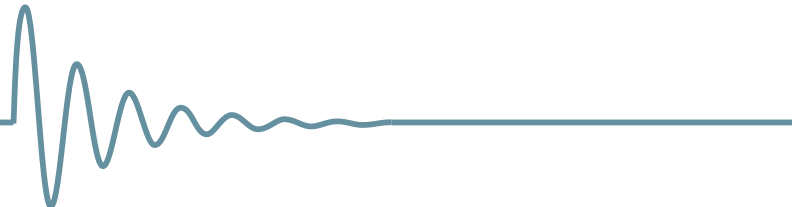
- **Ejemplo:** Analizar las posibles señales asociadas a la expresión algebraica de la transformada de Laplace

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

- Para calcular la transformada inversa de Laplace mediante la expansión en fracciones parciales:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$\begin{aligned} A &= (s+1)X(s) \Big|_{s=-1} = 1 \\ B &= (s+2)X(s) \Big|_{s=-2} = -1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$



Propiedades de la región de convergencia (XI)

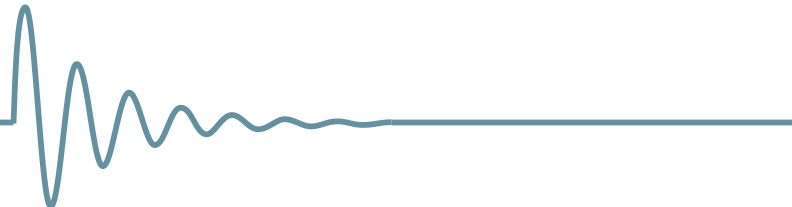
$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

- Analizamos las 3 regiones de convergencia:

- **$\text{Re}\{s\} > -1$** : La RoC está a la derecha de ambos polos. La transformada inversa de cada uno de los términos se obtiene,

$$\begin{aligned} e^{-t}u(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1}, & \text{Re}\{s\} > -1 \\ e^{-2t}u(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2}, & \text{Re}\{s\} > -2 \end{aligned}$$

$$x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$



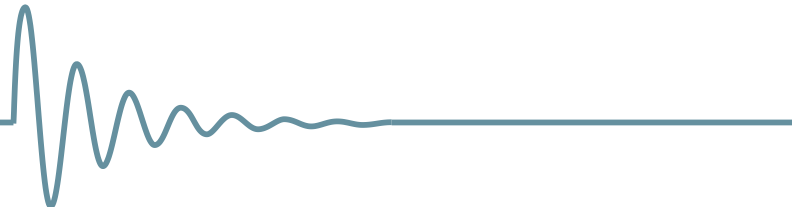
Propiedades de la región de convergencia (XII)

- **$\text{Re}\{s\} < -2$:** La RoC está a la izquierda de ambos polos. La transformada inversa de cada uno de los términos se obtiene,

$$-e^{-t}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} < -1$$

$$-e^{-2t}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2}, \quad \text{Re}\{s\} < -2$$

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) + e^{-2t}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} < -2$$

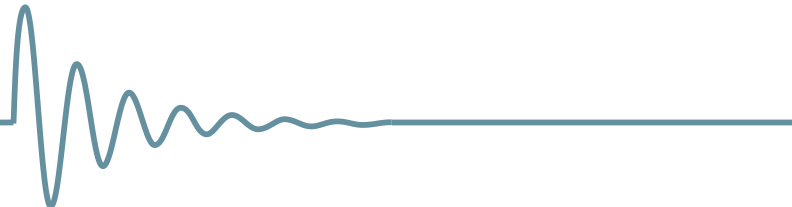


Propiedades de la región de convergencia (XIII)

- $-2 < \text{Re}\{s\} < -1$: En este caso, la RoC está a la izquierda del polo en $s = -1$ por lo que este término corresponde a una señal acotada por la derecha (se extiende hacia $-\infty$), y la RoC está a la derecha del polo en $s = -2$, luego este término corresponde a la señal acotada por la izquierda (se extiende hacia ∞ por la derecha). Combinamos ambos resultados:

$$\begin{aligned} -e^{-t}u(-t) &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1}, & \text{Re}\{s\} < -1 \\ e^{-2t}u(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2}, & \text{Re}\{s\} > -2 \end{aligned}$$

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, -2 < \text{Re}\{s\} < -1$$



Propiedades de la transformada de Laplace (I)

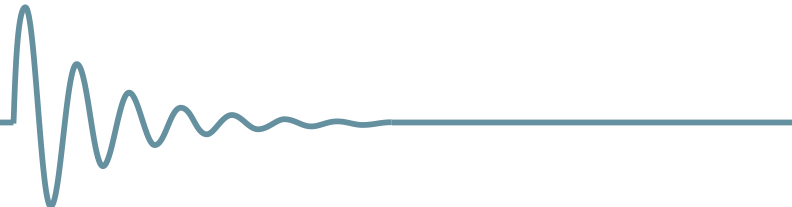
$$\begin{aligned}x(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s), & RoC = R_x \\y(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s), & RoC = R_y\end{aligned}$$

- Linealidad:

$$ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} aX(s) + bY(s), \quad RoC \supset R_x \cap R_y$$

- Desplazamiento en el dominio del tiempo

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0}X(s), \quad RoC = R_x$$



Propiedades de la transformada de Laplace (II)

- Desplazamiento en el dominio s

$$e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s - s_0), \quad RoC = R_x + Re\{s_0\}$$

- Escalado temporal

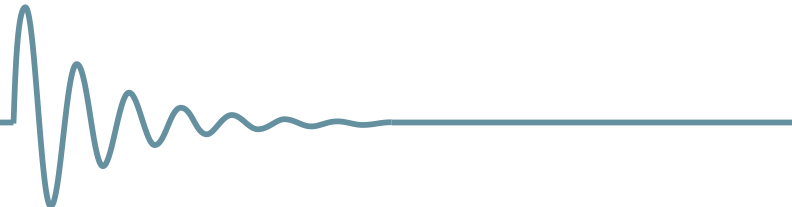
$$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad RoC = \frac{R_x}{|a|}$$

- Conjugación

$$x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X^*(s^*), \quad RoC = R_x$$

- Convolución

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) Y(s), \quad RoC \supset R_x \cap R_y$$



Propiedades de la transformada de Laplace (III)

- Derivación en el dominio del tiempo

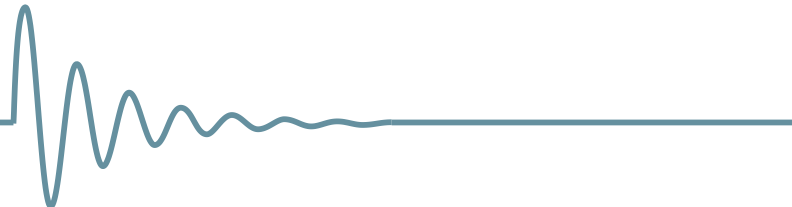
$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sX(s), \quad RoC \supset R_x$$

- Derivación en el dominio s

$$-tx(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dX(s)}{ds}, \quad RoC = R_x$$

- Integración en el dominio del tiempo

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} X(s), \quad RoC \supset R_x \cap Re\{s\} > 0$$



Propiedades de la transformada de Laplace (IV)

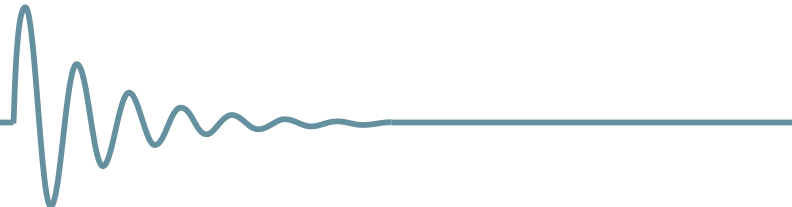
- Si $x(t) = 0$ para $t < 0$ y suponiendo que $x(t)$ no contiene impulsos o singularidades en el origen:

- Teorema del Valor Inicial

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0^+)$$

- Teorema del Valor Final

$$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$



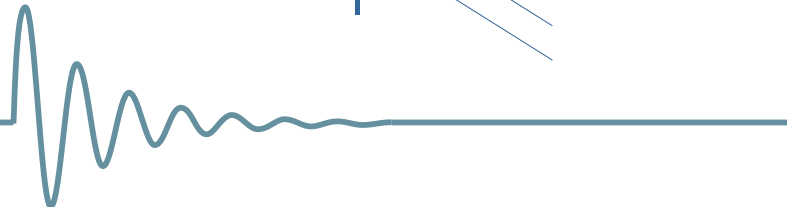
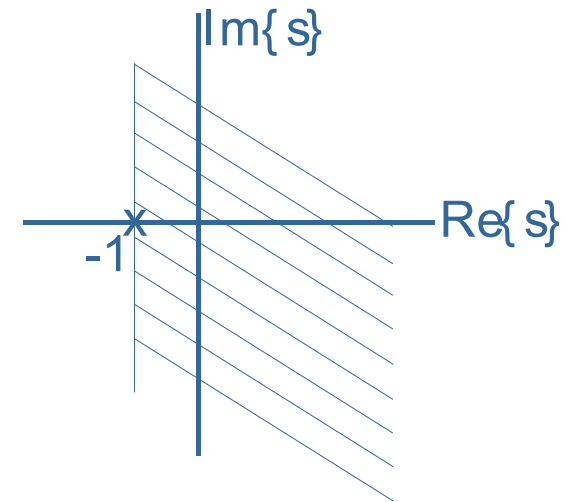
Análisis y Caracterización de los sistemas LTI (I)

- **Sistema LTI causal:** $h(t) = 0, t < 0$ (Señal acotada por la izquierda)
 - RoC asociada a la función de transferencia de un sistema causal es el semiplano derecho (Propiedad 4).
 - Si la función de transferencia es racional y el sistema es causal, la RoC estará a la derecha del polo más a la derecha
 - **Ejemplo:** Considerar un sistema causal con respuesta al impulso

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

- RoC semiplano derecho

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \text{Re}\{s\} > -1$$



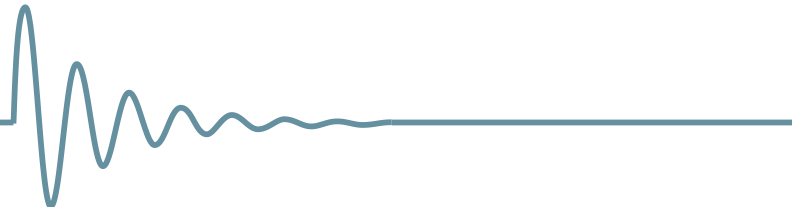
Análisis y caracterización de los sistemas LTI (II)

- Si la RoC asociada a la función de transferencia del sistema es el semiplano derecho entonces la respuesta al impulso del sistema está acotada por la izquierda, pero el sistema no es necesariamente causal.
- **Ejemplo:** Considerar un sistema con función de transferencia

$$H(s) = \frac{e^s}{s + 1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

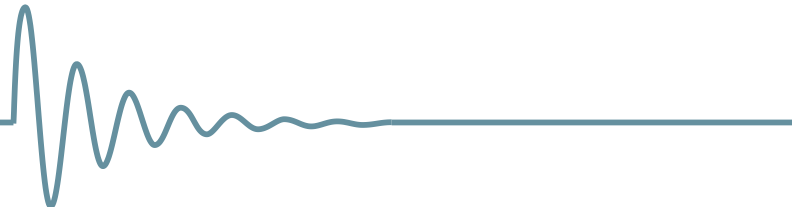
- RoC $\equiv$ *semiplano derecho*, $h(t)$ *acotada por la izquierda*

$$\left. \begin{array}{l} e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1}, \text{Re}\{s\} > -1 \\ e^{-(t+1)}u(t+1) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{e^s}{s+1}, \text{Re}\{s\} > -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1) \\ \Downarrow \\ \text{Sistema no causal} \end{array}$$



Análisis y caracterización de los sistemas LTI (III)

- **Sistema LTI anticausal:** $h(t) = 0, t > 0$ (Señal acotada por la derecha)
 - RoC asociada a la función de transferencia de un sistema anticausal es el semiplano izquierdo (Propiedad 5).
 - Si la función de transferencia es racional y el sistema es anticausal, la RoC estará a la izquierda del polo más a la izquierda
 - Si la RoC asociada a la función de transferencia del sistema es el semiplano izquierdo entonces la respuesta al impulso del sistema está acotada por la derecha, pero el sistema no es necesariamente anticausal.

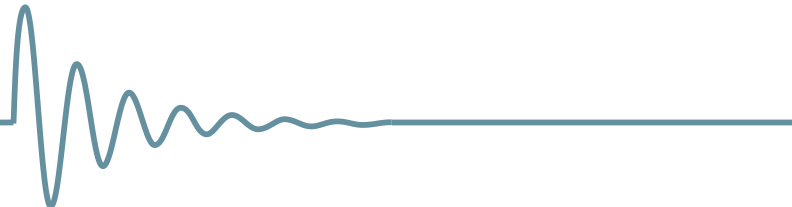


Análisis y caracterización de los sistemas LTI (IV)

■ Sistema LTI estable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \Rightarrow \mathcal{F}\{h(t)\} \text{ converge}$$

- Un sistema LTI es estable si y sólo si la RoC asociada a la función de transferencia del sistema incluye el eje- $j\omega$ ($\text{Re}\{s\} = \sigma = 0$)
- Si un sistema tiene función de transferencia racional y es causal (RoC a la derecha del polo situado más a la derecha) se puede afirmar que el sistema es estable si todos los polos de $H(s)$ están situados en el semiplano izquierdo, es decir, si todos los polos tienen parte real negativa



Transformada inversa de Laplace (I)

- Sea s un complejo arbitrario de la forma $s = \sigma + j\omega$
- La transformada de Laplace de la señal $x(t)$

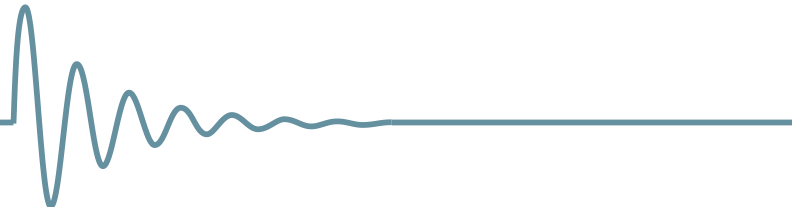
$$\begin{aligned} X(s) &= X(\sigma + j\omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t)e^{-\sigma t})e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} \end{aligned}$$

- Aplicando la transformada inversa de Fourier

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

$$\text{Como } s = \sigma + j\omega, ds = jd\omega \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st} ds$$

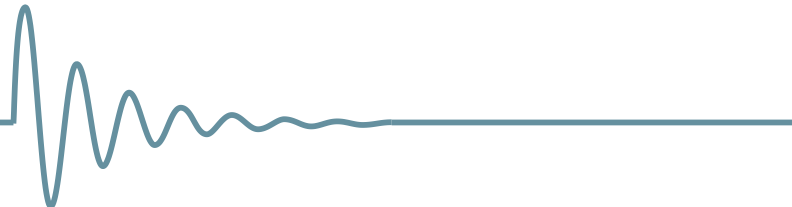


Sistemas LTI: EDL-CC (I)

- Se puede obtener la función de transferencia de un sistema LTI caracterizado por ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes sin necesidad de obtener la respuesta al impulso o la solución en el dominio del tiempo

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) \sum_{k=0}^N a_k s^k = X(s) \sum_{k=0}^M b_k s^k$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} H(s) \text{ es siempre racional} \\ \text{ceros: } \sum_{k=0}^M b_k s^k = 0 \\ \text{polos: } \sum_{k=0}^N a_k s^k = 0 \end{array} \right.$$



Sistemas LTI: EDL-CC (II)

- **Ejemplo:** Obtener la función de transferencia de un sistema LTI para el que la entrada y la salida satisfacen la ecuación diferencial:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

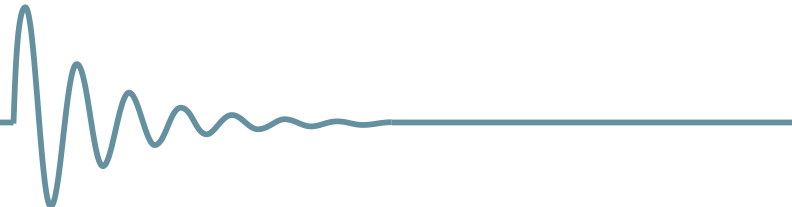
- Aplicando las propiedades de linealidad y diferenciación en el dominio del tiempo, se obtiene la siguiente expresión algebraica de la transformada de Laplace:

$$sY(s) + 3Y(s) = X(s)$$

$$Y(s)[s + 3] = X(s)$$

- Propiedad de convolución:

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = X(s) H(s), \quad RoC \supset R_X \cap R_H$$

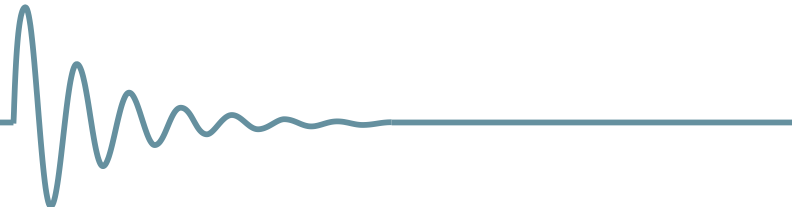


Sistemas LTI: EDL-CC (III)

- Y por tanto podemos conocer la función de transferencia $H(s)$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s + 3}, \quad \text{¿RoC =?}$$

- Se ve que la ecuación diferencial no proporciona una especificación completa del sistema y en general existen diferentes respuestas al impulso consistentes con la ecuación



Caracterización de sistemas mediante $H(s)$ (I)

- **Ejemplo1:** Obtener la función de transferencia de un sistema LTI si se conocen las señales de entrada y salida:

$$x(t) = e^{-3t}u(t)$$

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

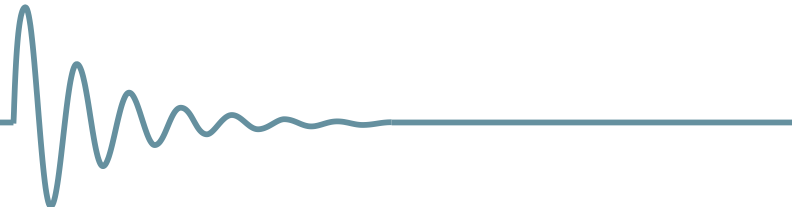
Escribimos la transformada de Laplace:

$$x(t) = e^{-3t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s+3}, \quad \text{Re}\{s\} > -3$$

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

La expresión algebraica de la función de transferencia:

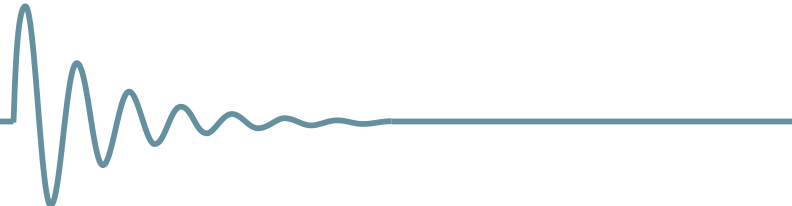
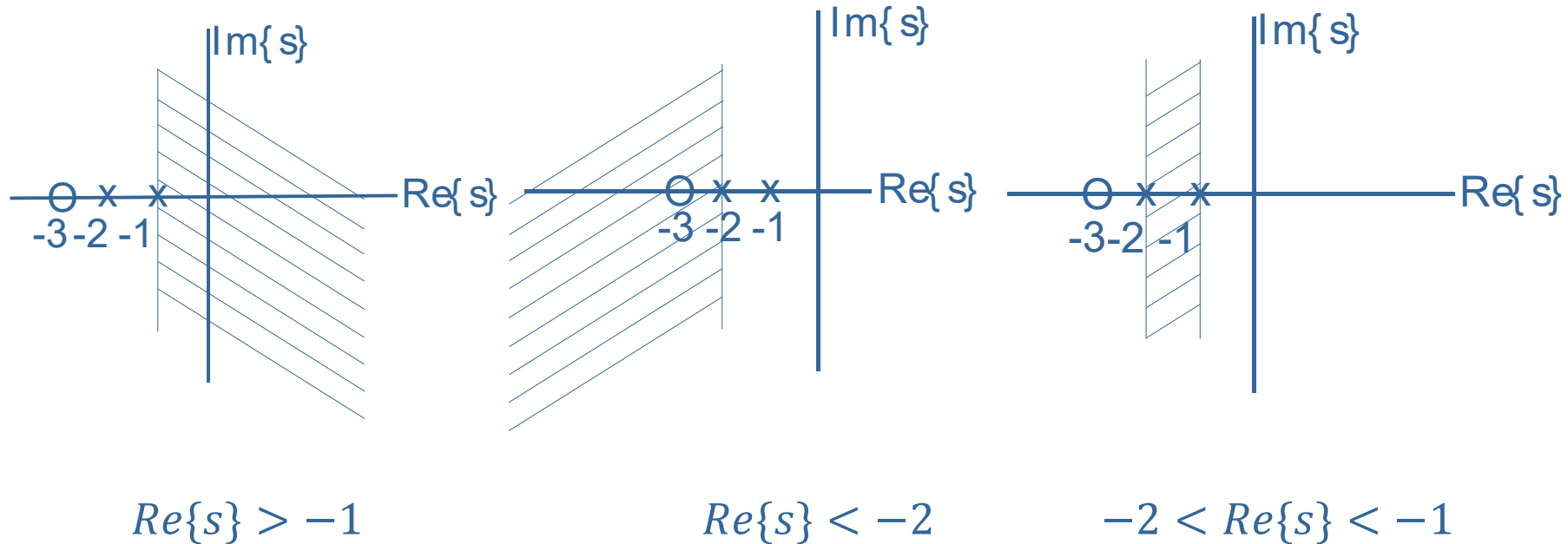
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{¿RoC =?}$$



Caracterización de sistemas mediante $H(s)$ (II)

- Se analizan las posibles regiones de convergencia para así caracterizar el sistema:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

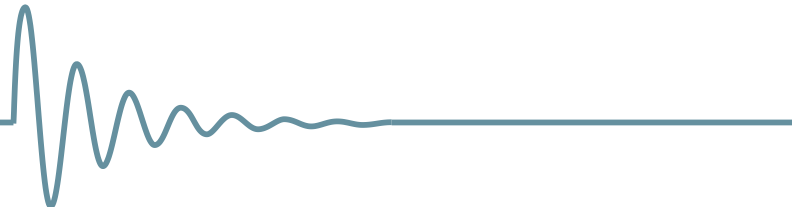
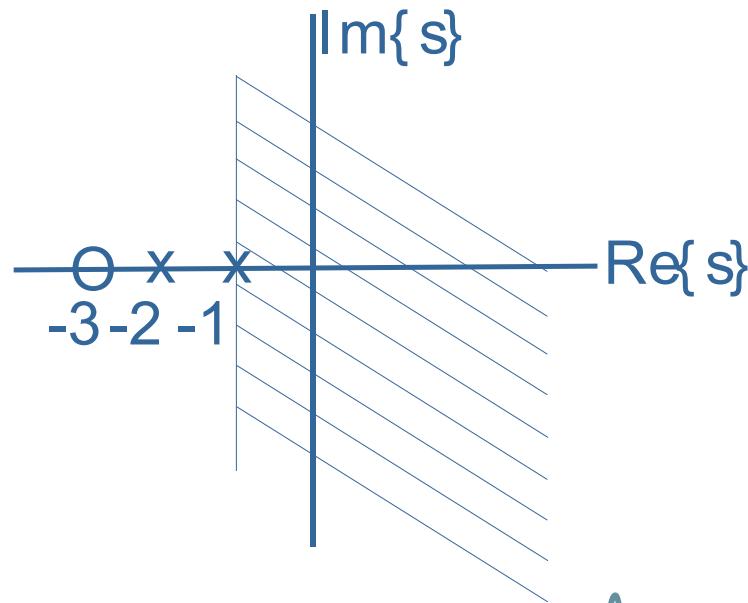


Caracterización de sistemas mediante $H(s)$ (III)

- Teniendo en cuenta las regiones de convergencia de $x(t)$ e $y(t)$,

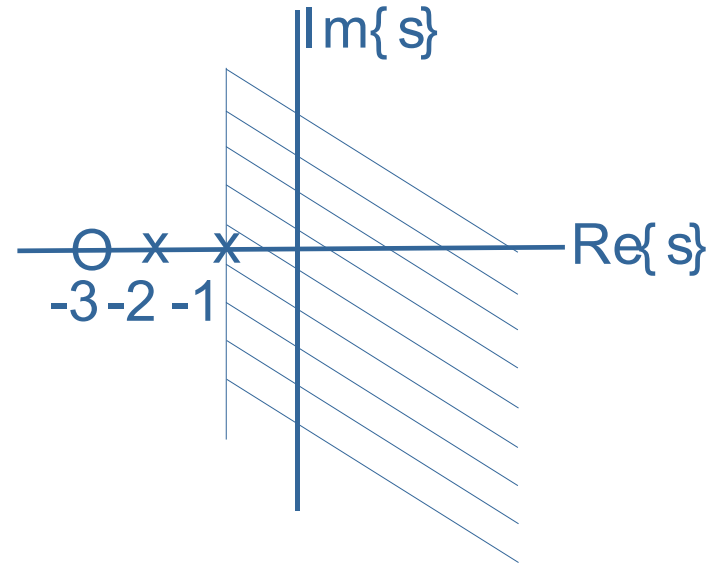
$$y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = X(s) H(s), \quad RoC \supset R_X \cap R_H$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}, \quad Re\{s\} > -1$$



Caracterización de sistemas mediante H(s) (IV)

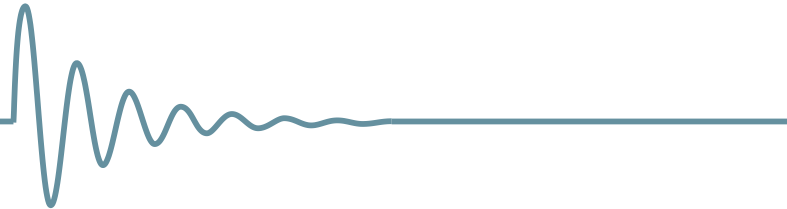
$$H(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$



- El sistema es causal
- El sistema es estable
- El sistema puede representarse mediante la ecuación diferencial lineal

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

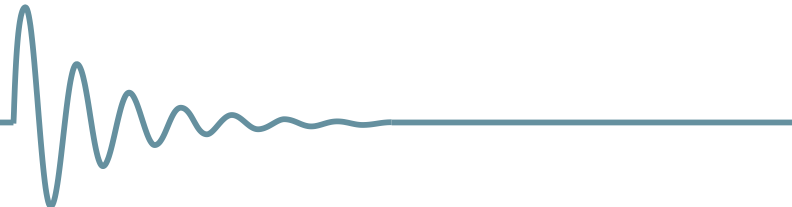
- El sistema está en reposo



Caracterización de sistemas mediante $H(s)$ (V)

- **Ejemplo2:** Se tiene la siguiente información acerca de un sistema LTI:
 1. El sistema es causal
 2. La función de transferencia es racional y tiene dos polos: $s = -2$ y $s = 4$
 3. Si $x(t) = 1$, $y(t) = 0$
 4. El valor de la respuesta al impulso en $t = 0^+$ es 4
- De 1 y 2 se concluye que el sistema es inestable pues es causal y tiene un polo con parte real positiva
- De 2 se puede determinar la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{p(s)}{(s + 2)(s - 4)}$$



Caracterización de sistemas mediante $H(s)$ (VI)

- De 3 se determina $p(s)$:

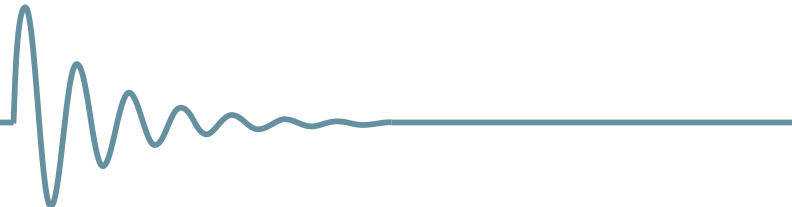
$$\left. \begin{array}{l} x(t) = e^{st} = 1 \Rightarrow s = 0 \\ y(t) = H(s)e^{st} \\ y(t)|_{s=0} = 0 = H(0)e^{0t} = H(0) \end{array} \right\} \Rightarrow H(s)|_{s=0} = \frac{p(s)}{(s+2)(s-4)} \Big|_{s=0} = 0$$

$$p(0) = 0 \Rightarrow p(s) \text{ tiene una raíz en } s = 0 \Rightarrow p(s) = sq(s)$$

- De 4 se determina $q(s)$ aplicando el teorema del valor inicial

$$h(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 q(s)}{(s+2)(s-4)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 q(s)}{s^2 - 2s - 8} = 4$$

$$q(s) = 4 \Rightarrow H(s) = \frac{4s}{(s+2)(s-4)}$$



Transformada unilateral de Laplace (I)

- Transformada unilateral de Laplace:

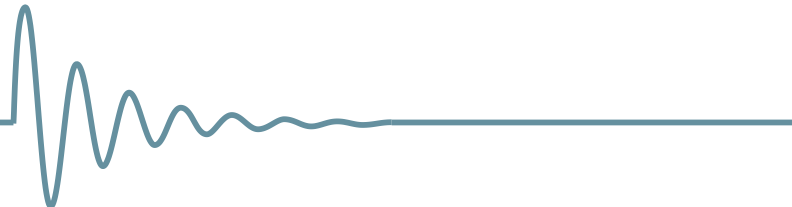
$$\mathcal{X}(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$x(t) = e^{at}u(t): \begin{cases} X(s) = \frac{1}{s-a}, & \text{Re}\{s\} > a \\ \mathcal{X}(s) = \frac{1}{s-a} \end{cases}$$

- Si $x(t) = 0$ para $t < 0$, $X(s) = \mathcal{X}(s)$

- Interés:

- Análisis de sistemas causales
- Análisis de sistemas especificados por ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes y con condiciones iniciales distintas de cero (sistemas que inicialmente no están en reposo)



Propiedades de la transformada unilateral de Laplace (I)

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \mathcal{X}(s)$$

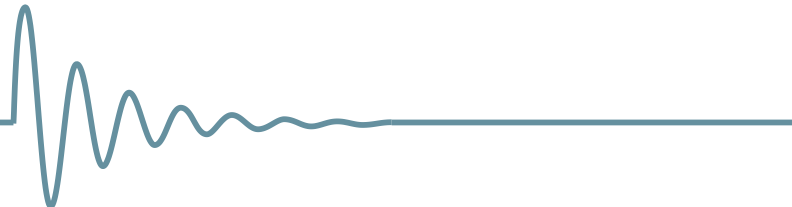
$$y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \mathcal{Y}(s)$$

- Linealidad:

$$ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} a\mathcal{X}(s) + b\mathcal{Y}(s)$$

- Desplazamiento en el dominio del tiempo

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} e^{-st_0} \mathcal{X}(s)$$



Propiedades de la transformada unilateral de Laplace (II)

- Desplazamiento en el dominio s

$$e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \mathcal{X}(s - s_0)$$

- Escalado temporal

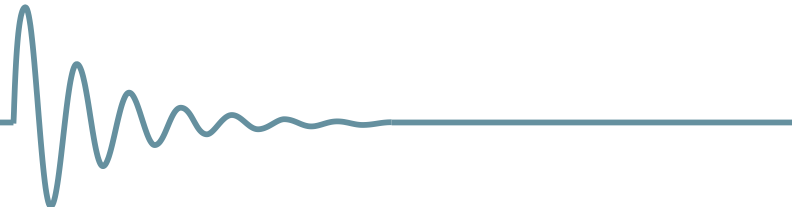
$$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \frac{1}{a} \mathcal{X}\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$$

- Conjugación

$$x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \mathcal{X}^*(s)$$

- Convolución

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \mathcal{X}(s) \mathcal{Y}(s)$$



Propiedades de la transformada unilateral de Laplace (III)

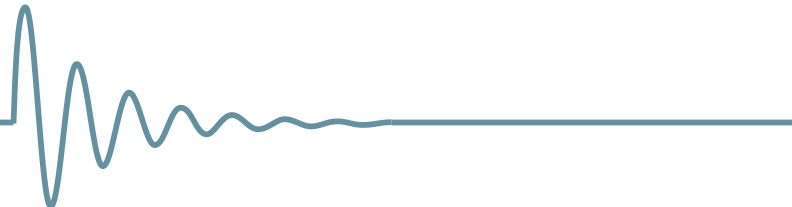
- Derivación en el dominio del tiempo

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$$

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = e^{-st} x(t) \Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^t (-s)x(t)e^{-st} dt \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} s^2\mathcal{X}(s) - sx(0^-) - \frac{dx(0^-)}{dt}$$

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} s^n\mathcal{X}(s) - \frac{d^{n-1}x(0^-)}{dt^{n-1}} - s \frac{d^{n-2}x(0^-)}{dt^{n-2}} - \dots - s^{n-2} \frac{dx(0^-)}{dt} - s^{n-1}x(0^-)$$



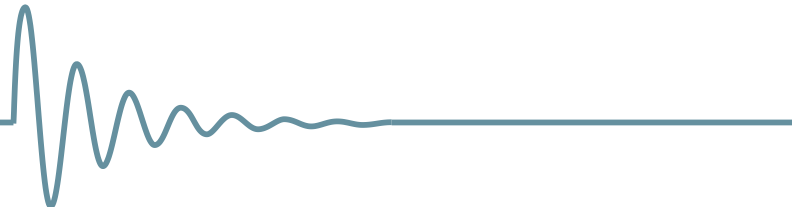
Propiedades de la transformada unilateral de Laplace (IV)

- Derivación en el dominio s

$$\begin{aligned} -tx(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \frac{dX(s)}{ds} \\ &\dots \\ (-t)^n x(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \frac{d^n X(s)}{ds^n} \end{aligned}$$

- Integración en el dominio del tiempo

$$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \frac{1}{s} X(s)$$



Propiedades de la transformada unilateral de Laplace (V)

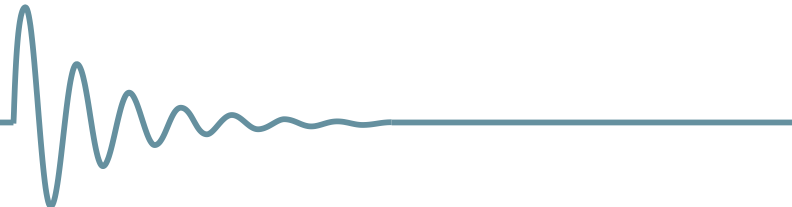
- Si $x(t) = 0$ para $t < 0$ y suponiendo que $x(t)$ no contiene impulsos o singularidades en el origen:

- Teorema del Valor Inicial

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{X}(s)$$

- Teorema del Valor Final

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{X}(s)$$



Ejemplo (VI)

- Sistema LTI:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

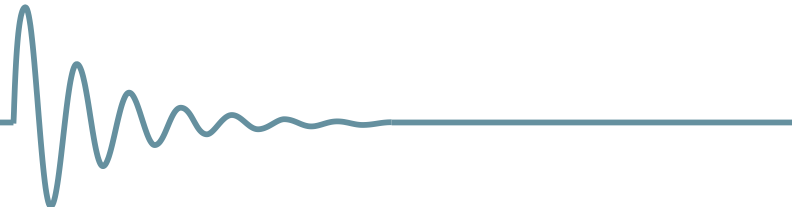
- Condiciones iniciales del sistema:

$$y(0^-) = \beta$$

$$\frac{dy(0^-)}{dt} = \gamma$$

- Señal de entrada

$$x(t) = \alpha u(t)$$



Ejemplo (VII)

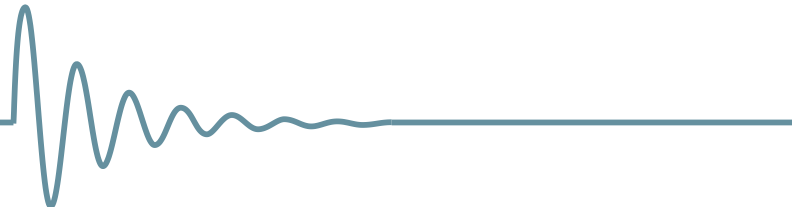
- Aplicamos la propiedad de derivación de la transformada unilateral de Laplace

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} s^2 \mathcal{Y}(s) - s y(0^-) - \frac{dy(0^-)}{dt}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} s \mathcal{Y}(s) - y(0^-)$$

y por linealidad

$$s^2 \mathcal{Y}(s) - s y(0^-) - \frac{dy(0^-)}{dt} + 3s \mathcal{Y}(s) - 3y(0^-) + 2\mathcal{Y}(s) = \mathcal{X}(s)$$



Ejemplo (VIII)

- Teniendo en cuenta las condiciones iniciales

$$s^2 y(s) - \beta s - \gamma + 3s y(s) - 3\beta + 2y(s) = \frac{\alpha}{s}$$

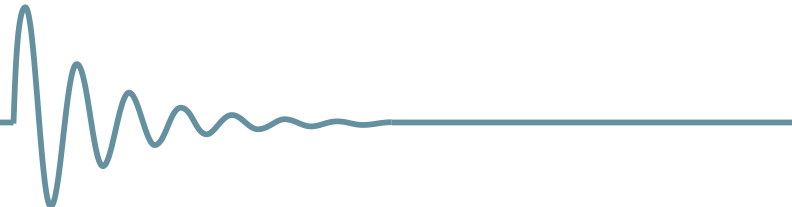
$$y(s)[s^2 + 3s + 2] = \frac{\alpha}{s} + \beta(s + 3) + \gamma$$

Calculamos las raíces de $s^2 + 3s + 2$ y escribimos el polinomio como:

$$s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$$

Entonces

$$y(s) = \frac{\alpha}{s(s + 1)(s + 2)} + \frac{\beta(s + 3)}{(s + 1)(s + 2)} + \frac{\gamma}{(s + 1)(s + 2)}$$



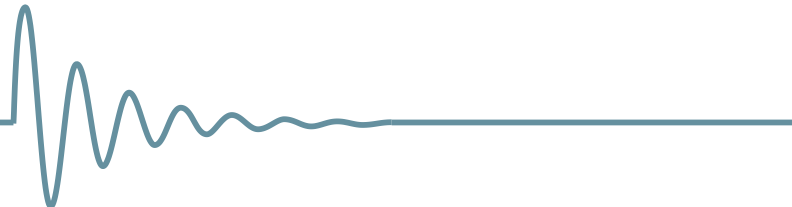
Ejemplo (IX)

- Respuesta forzada del sistema o respuesta a condiciones iniciales nulas ($\beta = \gamma = 0$)

$$y^f(s) = \frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}$$

- Respuesta natural del sistema o respuesta a entrada nula ($\alpha = 0$)

$$y^n(s) = \frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)} + \frac{\gamma}{(s+1)(s+2)}$$



Ejemplo (X)

- Dando valores a: α, β, γ

$$\alpha = 2; \quad \beta = 3; \quad \gamma = -5$$

Y teniendo en cuenta que $y(s) = y^n(s) + y^f(s)$

$$y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

- luego,

$$y(t) = u(t) - e^{-t}u(t) + 3e^{-2t}u(t) = [1 - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t)$$

